Sí, no, anzi: probabilmente

Giovanni Taglialatela

http://www.uniba.it/docenti/taglialatela-giovanni

Università degli studi di Bari Aldo Moro
Dipartimento di Economia e Finanza

01 marzo 2022

Definizione classica di probabilità (probabilità a priori)

La probabilità che si verifichi un dato evento E è il rapporto

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{numero di casi favorevoli all'evento}}{\text{numero di casi } \textbf{possibili}}$$

purché tutti i casi considerati siano **equiprobabili**.

Domanda

Cosa vuol dire **equiprobabili**?

Da un punto di vista logico tale definizione non è corretta,
poiché per definirla si usa il concetto di **eventi equiprobabili**
e per definire un concetto non si puó usare il concetto stesso.

Definizione classica di probabilità (probabilità a priori)

La probabilità che si verifichi un dato evento E è il rapporto

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{numero di casi favorevoli all'evento}}{\text{numero di casi } \textbf{possibili}}$$

purché tutti i casi considerati siano **equiprobabili**.

Domanda

I casi sono sempre **equiprobabili**?

Principio di indifferenza

Dato un gruppo di eventi, se non ci sono valide ragioni per pensare che qualche evento si verifichi più o meno facilmente degli altri, allora tutti gli eventi del gruppo si devono considerare equiprobabili.

Definizione classica di probabilità (probabilità a priori)

La probabilità che si verifichi un dato evento E è il rapporto

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{numero di casi favorevoli all'evento}}{\text{numero di casi } \textbf{possibili}}$$

purché tutti i casi considerati siano **equiprobabili**.

Domanda

E se i casi sono infiniti?

Definizione classica di probabilità (probabilità a priori)

Esempio:

Lanciamo una moneta **non truccata**.
La probabilità che esca testa è

$$\mathbb{P}(\text{testa}) = \frac{1}{2}.$$

Esempio:

Estraiamo una carta da un mazzo di 54 carte francesi.
La probabilità di estrarre un Asso è

$$\mathbb{P}(\text{Asso}) = \frac{4}{54} = \frac{1}{13}.$$

Definizione frequentistica (o statistica) di probabilitá

Ripetiamo il medesimo esperimento, nelle medesime condizioni.

La probabilità del verificarsi di un evento E è data dalla frequenza con cui esso si verifica:

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{numero di prove in cui si verifica l'evento}}{\text{numero di ripetizioni dell'esperimento}}$$

Problema

Come ripetere l'esperimento, nelle medesime condizioni?

Legge empirica del caso

Al crescere del numero di esperimenti la frequenza di un evento si avvicina alla sua probabilità.

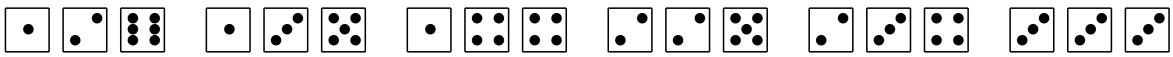
Galileo Galilei, *Sopra le scoperte de i dadi*, (1612) – 1/5

Lanciamo tre dadi e sommiamo i risultati ottenuti.

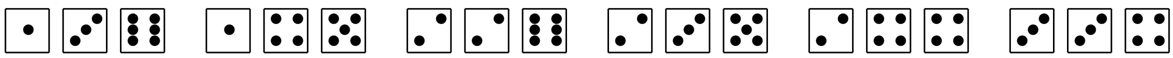
> *... ancor che il 9 e il 12 in altrettante maniere si componghino in quante il 10 e l'11, per lo che di eguale uso devriano esser reputati, si vede non di meno che la lunga osservazione ha fatto da i giocatori stimarsi più vantaggiosi il 10 e l'11 che il 9 e il 12.*

Galileo Galilei, *Sopra le scoperte de i dadi*, (1612) – 2/5

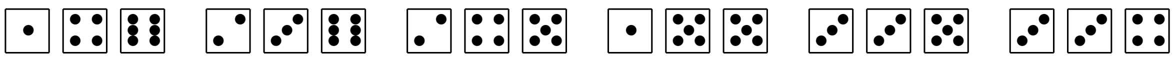
La somma 9 si compone con:



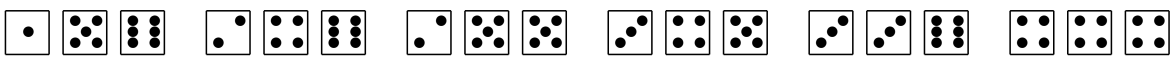
La somma 10 si compone con:



La somma 11 si compone con:

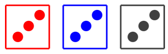


La somma 12 si compone con:

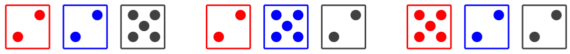


Galileo Galilei, *Sopra le scoperte de i dadi*, (1612) – 3/5

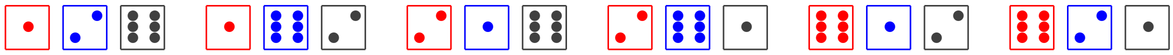
- Una combinazione di tre numeri uguali può presentarsi in un solo modo:



- Una combinazione con due numeri uguali può presentarsi in tre modi diversi:

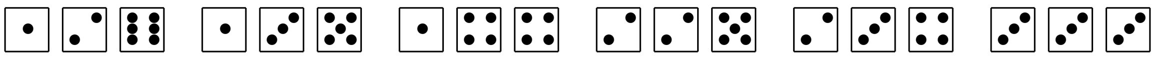


- Una combinazione con tre numeri diversi in sei modi diversi.



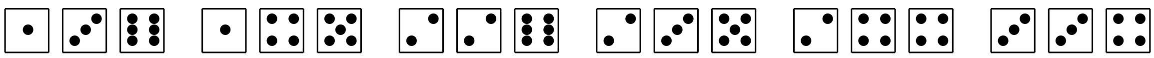
Galileo Galilei, *Sopra le scoperte de i dadi*, (1612) – 4/5

La somma 9 si compone in 25 modi diversi:



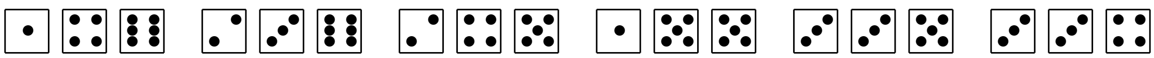
6 6 3 3 6 1

La somma 10 si compone in 27 modi diversi:



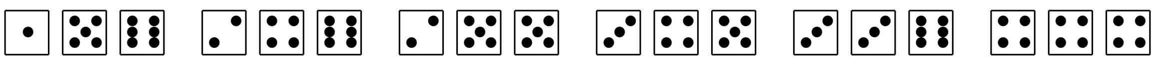
6 6 3 6 3 3

La somma 11 si compone in 27 modi diversi:



6 6 6 3 3 3

La somma 12 si compone in 25 modi diversi:



6 6 3 6 3 1

Galileo Galilei, *Sopra le scoperte de i dadi*, (1612) – 5/5

Quindi:

$$\mathbb{P}(\text{somma dei tre dadi} = 9) = \mathbb{P}(\text{somma dei tre dadi} = 12) = \frac{25}{216}$$

$$\mathbb{P}(\text{somma dei tre dadi} = 10) = \mathbb{P}(\text{somma dei tre dadi} = 11) = \frac{27}{216}$$

Definizione soggettiva di probabilità

La probabilità di un evento è data dal **prezzo** che un individuo coerente è disposto a pagare per

- ricevere 1 se l'evento si verifica,
- 0 se l'evento non si verifica.

Non deve essere possibile né una vincita certa, né una perdita certa.

Estrazione di un campione da un insieme finito

Sia S un insieme finito di n elementi, e sia $k = 1, 2, \ldots$.
Possiamo estrarre da S un **campione** di k oggetti, in quattro modi diversi:

1) Disposizioni semplici: campione ordinato senza ripetizione

Estraiamo uno ad uno i k oggetti senza reinserire gli oggetti estratti (in tal caso $k \leq n$).

2) Disposizioni con ripetizione: campione ordinato con ripetizione

Estraiamo un oggetto da S, ne prendiamo nota, e lo inseriamo nuovamente in S. Estraiamo un secondo oggetto da S, ne prendiamo nota, e lo inseriamo nuovamente in S, e così via...
In tal modo ciascun oggetto può essere estratto più volte.

Estrazione di un campione da un insieme finito

Sia S un insieme finito di n elementi, e sia $k = 1, 2, \ldots$.

3) Combinazioni semplici: campione non ordinato senza ripetizione

Estraiamo uno ad uno i k oggetti senza reinserire gli oggetti estratti; una volta terminate le estrazioni non teniamo conto dell'ordine degli oggetti estratti.

4) Combinazioni con ripetizione: campione non ordinato con ripetizione

Estraiamo uno ad uno i k oggetti reinserendo gli oggetti estratti, in modo che un oggetto possa essere estratto più volte. Una volta ultimata l'estrazione non teniamo conto dell'ordine degli oggetti estratti.

Estrazione di un campione da un insieme finito

Esempio:

Campioni ordinati senza ripetizione

- Estrazioni del gioco del Lotto.

Campioni ordinati con ripetizione

- Pin del cellulare.

Campioni non ordinati senza ripetizione

- Mano di carte da gioco.

Campioni non ordinati con ripetizione

- Disposizione di palline indistinguibili in cassetti.

Vari modi di estrarre un campione

Esempio: $S = \{a, b, c\}$

Campioni ordinati senza ripetizione di due elementi

(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, a), (a, c).

Campioni ordinati con ripetizione di due elementi

(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (c, a), (a, c).

Campioni non ordinati senza ripetizione di due elementi

$\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$.

Campioni non ordinati con ripetizione di due elementi

$[\![a, a]\!]$, $[\![a, b]\!]$, $[\![b, b]\!]$, $[\![b, c]\!]$, $[\![c, c]\!]$, $[\![c, a]\!]$.

Disposizioni semplici: campione ordinato senza ripetizione

Domanda

Quante sono le possibili estrazioni ordinate di 5 numeri,
da un'urna contenente 90 palline numerate da 1 a 90?

Per la prima	estrazione abbiamo 90 scelte.
Per la seconda	estrazione abbiamo 89 scelte.
Per la terza	estrazione abbiamo 88 scelte.
Per la quarta	estrazione abbiamo 87 scelte.
Per la quinta	estrazione abbiamo 86 scelte.

In definitiva:

$$90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86$$

Disposizioni semplici: campione ordinato senza ripetizione

Domanda

Quante sono le possibili estrazioni ordinate di k numeri,
da un'urna contenente n palline numerate da 1 a n?

Per la prima	estrazione abbiamo	n	scelte.
Per la seconda	estrazione abbiamo	$n-1$	scelte.
Per la terza	estrazione abbiamo	$n-2$	scelte.
...			
Per la k-esima	estrazione abbiamo	$n-k+1$	scelte.

In definitiva:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)$$

Disposizioni semplici: campione ordinato senza ripetizione

Proposizione

Il numero di **disposizioni semplici** di lunghezza k da un insieme di n elementi è

$$\underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}_{k \text{ fattori}}$$

Lo si indica con $D_{n,k}$ oppure $(n)_k$

Esempio:

$(90)_5 = 90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86.$

Esempio:

$(54)_3 = 54 \times 53 \times 52.$

Permutazioni semplici: ordinamenti di un insieme

Domanda

Quanti sono i possibili modi di mescolare un mazzo di carte francesi?

$$54 \times 53 \times 52 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

In generale:

Proposizione

Il numero di **permutazioni semplici** degli elementi di un insieme con n elementi è dato da

$$(n)_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Lo si indica con P_n oppure $n!$.
$n!$ è detto **fattoriale** di n.
Per convenzione: $0! = 1$.

Permutazioni semplici: ordinamenti di un insieme

Osservazione:

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Difatti

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n-k)!} &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot(n-k-2)\cdot\dots\cdot3\cdot2\cdot1}\\ &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)\cdot{\color{red}(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\dots\cdot2\cdot1}}{{\color{red}(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot(n-k-2)\cdot\dots\cdot3\cdot2\cdot1}}\\ &= n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)\\ &= (n)_k\end{aligned}$$

Campione ordinato con ripetizione: disposizioni con ripetizione

Domanda

Quanti sono i possibili PIN di 4 numeri?

Per la prima cifra abbiamo 10 scelte.
Per la seconda cifra abbiamo 10 scelte.
Per la terza cifra abbiamo 10 scelte.
Per la quarta cifra abbiamo 10 scelte.

In definitiva:

$$10\times10\times10\times10 = 10^4 = 10.000$$

Campione ordinato con ripetizione: disposizioni con ripetizione

Domanda

Quante sono le possibili estrazioni ordinate con ripetizione di k elementi da un insieme di n elementi?

Proposizione

Il numero di **disposizioni con ripetizione** di lunghezza k da un insieme di n elementi è

$$n^k$$

Lo si indica con $D'_{n,k}$.

Campione non ordinato senza ripetizione: combinazioni semplici.

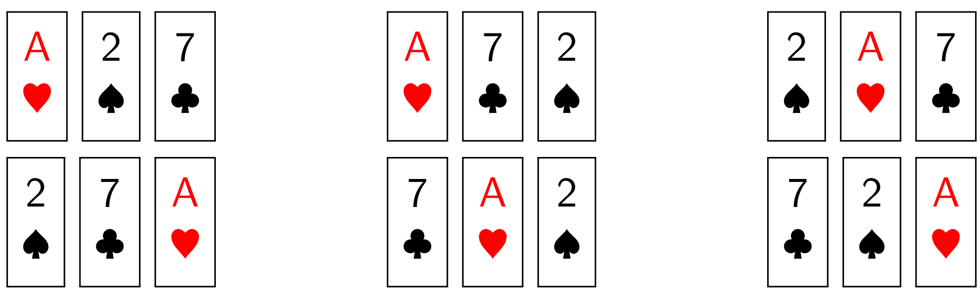
Domanda

Quante sono le possibili mani di tre carte, con un mazzo di carte francesi?

I campioni ordinati di 3 elementi da un insieme di 54 elementi sono

$$54 \times 53 \times 52$$

In una mano di carte, **non ha importanza l'ordine**:



rappresentano la stessa mano di gioco.

Campione non ordinato senza ripetizione: combinazioni semplici.

Domanda

Quante sono le possibili mani di tre carte, con un mazzo di carte francesi?

I campioni ordinati di 3 elementi da un insieme di 54 elementi sono

$$54 \times 53 \times 52$$

Le mani di tre carte sono

$$\frac{54 \times 53 \times 52}{3!}$$

Si noti che

$$\frac{54 \times 53 \times 52}{3!} = \frac{54 \times 53 \times 52}{3!} \cdot \frac{51!}{51!} = \frac{54!}{3! \cdot 51!}$$

Coefficienti binomiali

In generale:

Proposizione

Il numero di **combinazioni semplici** di lunghezza k da un insieme di n elementi è

$$\frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{\text{numero di disposizioni semplici}}{\text{numero di permutazioni semplici}}$$

Lo si indica con $\binom{n}{k}$ oppure con $C_{n,k}$.

Osservazione

$\binom{n}{k}$ è il numero di sottoinsiemi di k elementi, di un insieme di n elementi.

Coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Esempio:

Numero di mani di tre carte, da un mazzo di carte francesi.

permutazioni del mazzo di carte

$$\binom{54}{3} = \frac{54!}{3!\ (54-3)!}$$

permutazioni delle carte servite

permutazioni delle restanti carte

Coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Esempio:

Una mano di poker è formata da 5 carte estratte senza reinserimento e senza interesse per l'ordine da un mazzo di 32 carte (A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, per i 4 colori ♥, ♦, ♣, ♠).
Il numero di mani di poker è

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 201376\,.$$

Coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Esempio:

$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3;$

$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{720}{24 \cdot 2} = 15.$

Nota

Per comodità si pone $\binom{n}{k} = 0$ se $k < 0$, oppure $k > n$.

Proprietà dei coefficienti binomiali

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$;
2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$;
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
4. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$.
   (Formula di Stifel)

Dimostrazione della Formula di Stifel

Sia

$$S = \{1, 2, \ldots, n-1, n, n+1\}$$

Il numero di sottoinsiemi con k elementi di S è $\binom{n+1}{k}$

Il numero di sottoinsiemi di S **che non contengono** $n+1$ è $\binom{n}{k}$.

Il numero di sottoinsiemi di S **che contengono** $n+1$ è $\binom{n}{k-1}$.

Sommando

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Triangolo di Tartaglia

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Ogni numero è somma dei due numeri sovrastanti.

Binomio di Newton

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j \\ &= x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{1} x y^{n-1} + y^n.\end{aligned}$$

Esempi

$$\begin{array}{ll} n = 2 & (x+y)^2 = 1\,x^2 + 2\,xy + 1\,y^2 \\ n = 3 & (x+y)^3 = 1\,x^3 + 3\,x^2 y + 3\,xy^2 + 1\,y^3 \\ n = 4 & (x+y)^4 = 1\,x^4 + 4\,x^3 y + 6\,x^2 y^2 + 4\,xy^3 + 1\,y^4 \end{array}$$

Binomio di Newton

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & 1 & + & 1 & & & & = & 2 \\ & & 1 & + & 2 & + & 1 & & & = & 4 \\ & 1 & + & 3 & + & 3 & + & 1 & & = & 8 \\ 1 & + & 4 & + & 6 & + & 4 & + & 1 & = & 16 \end{array}$$

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

Se $x = y = 1$

$$(1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$$

Binomio di Newton

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & 1 & - & 1 & & & & = & 0 \\
 & & 1 & - & 2 & + & 1 & & & = & 0 \\
 & 1 & - & 3 & + & 3 & - & 1 & & = & 0 \\
1 & - & 4 & + & 6 & - & 4 & + & 1 & = & 0
\end{array}
$$

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

Se $x = 1$ e $y = -1$

$$(1-1)^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}$$

Logica degli eventi VS Teoria degli insiemi

Logica degli eventi	**Teoria degli insiemi**
evento impossibile	$\varnothing$
evento certo	S
si verifica l'evento A	A
evento contrario non si verifica l'evento A	$\complement A = S \setminus A$
si verificano sia A che B	$A \cap B$
si verifica almeno uno tra A e B	$A \cup B$
si verifica A ma non B	$A \setminus B$
B è **sufficiente** per A A è **necessario** per B (se si verifica B, si verifica anche A)	$B \subseteq A$ $A \supseteq B$
A e B sono **incompatibili** (A e B non possono verificarsi contempo-raneamente)	$A \cap B = \varnothing$

Definizione assiomatica di probabilitá

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. Se A e B sono incompatibili, allora:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

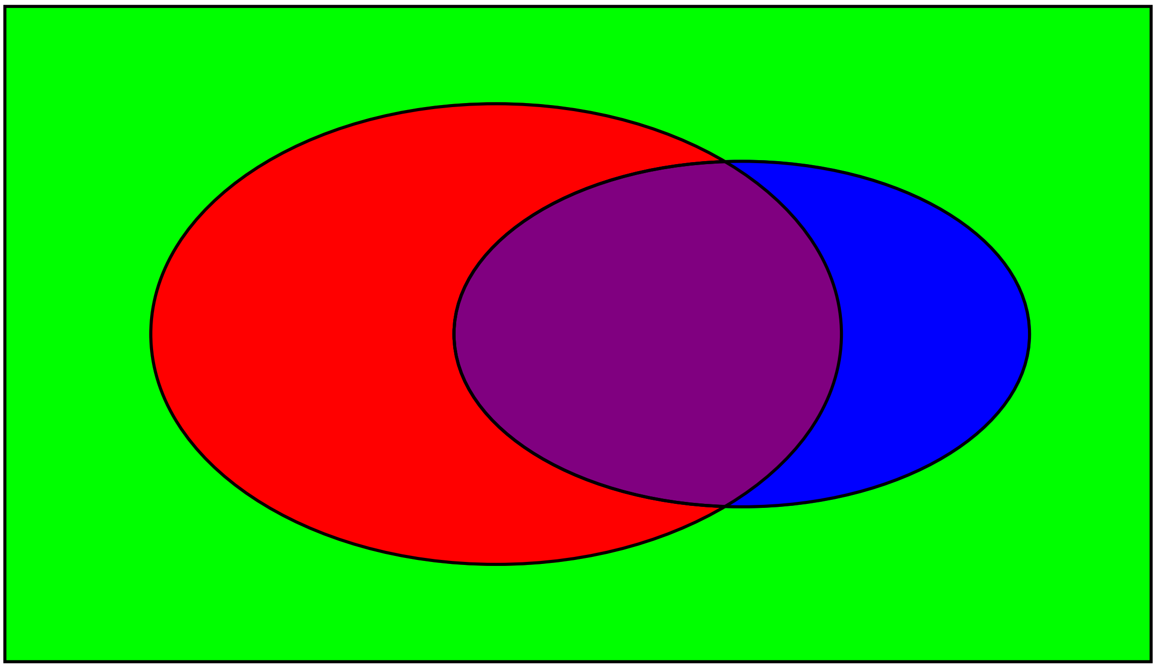
In generale

2. Se $A_1, \ldots, A_n$ sono **a due a due** incompatibili, allora:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)$$

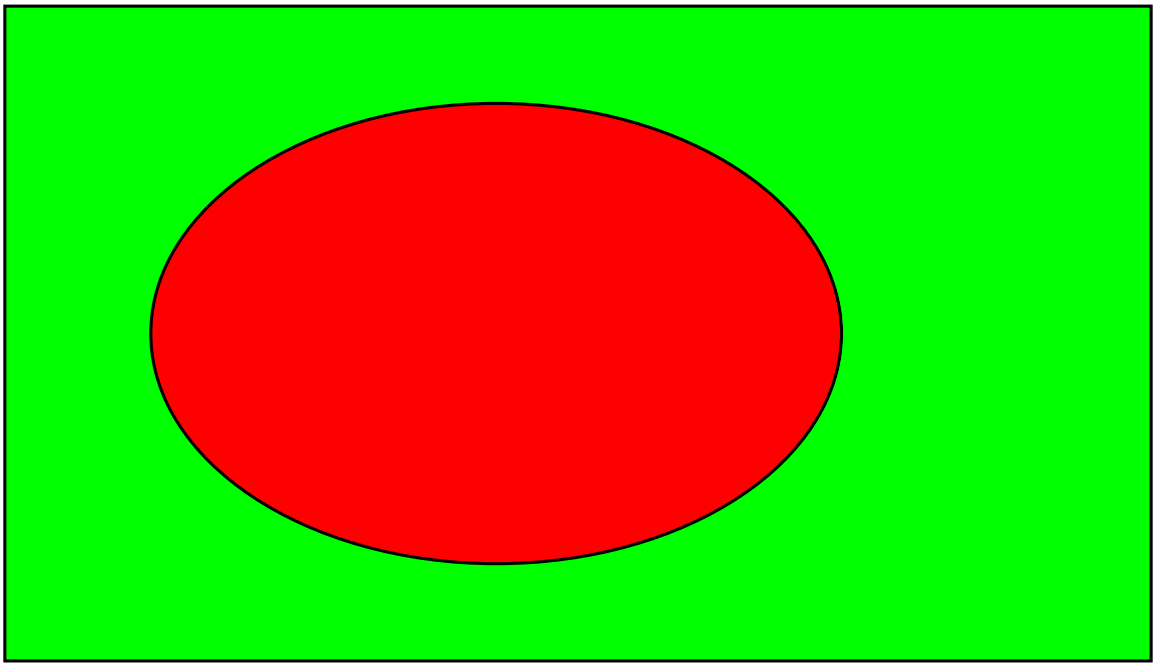
Formula di addizione e sottrazione

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$



Probabilità dell'evento contrario

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\complement A)$$



Probabilità dell'evento contrario: $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\complement A)$

$$\begin{array}{ccccc}
\{\ \textbf{casi favorevoli}\ \} & \bigcup & \{\ \textbf{casi sfavorevoli}\ \} & = & \{\ \textbf{casi possibili}\ \} \\[2ex]
\#\ \textbf{casi favorevoli} & + & \#\ \textbf{casi sfavorevoli} & = & \#\ \textbf{casi possibili} \\[2ex]
\dfrac{\#\ \textbf{casi favorevoli}}{\#\ \textbf{casi possibili}} & + & \dfrac{\#\ \textbf{casi sfavorevoli}}{\#\ \textbf{casi possibili}} & = & 1 \\[2ex]
\mathbb{P}(\text{si verifica } A) & + & \mathbb{P}(\text{NON si verifica } A) & = & 1
\end{array}$$

Probabilità dell'evento contrario: $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(CA)$

Problema del compleanno

Dato un gruppo di N persone, qual è la probabilità che ci siano **almeno due persone** nate lo stesso giorno.
(Supponiamo, per semplicità, che gli anni siano tutti di 365 giorni e che i compleanni siano equiprobabili).

Calcoliamo i "casi sfavorevoli", ovvero i casi in cui scegliendo a caso N date, esse risultino tutte diverse tra loro:

$$\text{numero di casi } \textbf{sfavorevoli} = (365)_N = \frac{365!}{(365-N)!}$$

$$\text{numero di casi } \textbf{possibili} = 365^N$$

La probabilità che N persone siano tutte nate in giorni differenti è

$$\frac{(365)_N}{365^N} = \frac{365!}{365^N\,(365-N)!}$$

Probabilità dell'evento contrario: $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(CA)$

La probabilità che N persone siano nate in giorni differenti è

$$\frac{(365)_N}{365^N} = \frac{365!}{365^N\,(365-N)!}$$

La probabilità cercata è dunque:

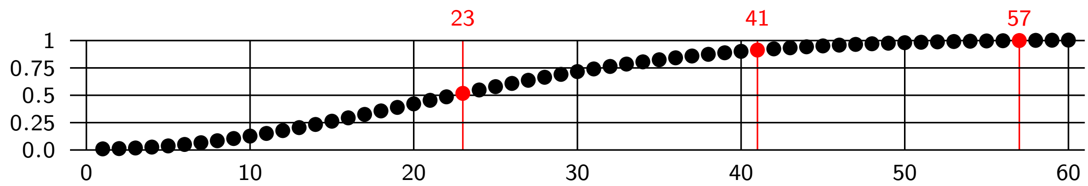
$$1 - \frac{365!}{365^N\,(365-N)!}$$

Paradosso del compleanno

1	0
2	0,0027...
3	0,0082...
4	0,0163...
5	0,0271...
6	0,0404...
7	0,0562...
8	0,0743...
9	0,0946...
10	0,1169...

11	0,1411...
12	0,1670...
13	0,1944...
14	0,2231...
15	0,2529...
16	0,2836...
17	0,3150...
18	0,3469...
19	0,3791...
20	0,4114...

21	0,4436...
22	0,4756...
23	0,5072 ...
24	0,5383...
25	0,5686...
⋮	
41	0,9032
⋮	
57	0,9901



Correlazione tra eventi

A e B sono

positivamente correlati se il verificarsi di uno dei due eventi fa sí che l'altro risulti **più probabile**;

negativamente correlati se il verificarsi di uno dei due eventi fa sí che l'altro risulti **meno probabile**;

indipendenti se il verificarsi di uno dei due eventi **non modifica** la probabilità dell'altro evento.

I termini *indipendenti* e *incompatibili* possono esser confusi, ma in realtà sono molto diversi.
L'incompatibilità di due eventi è un concetto insiemistico, (quindi non dipende dalla probabilità), mentre l'indipendenza è un concetto legato la probabilità.

Correlazione tra eventi

Esempio

Sia X il risultato del lancio di un dado equilibrato a sei facce, e siano

A l'evento "$X \geq 4$";

B l'evento "X è pari";

C l'evento "X è dispari".

A e B sono positivamente correlati, difatti se $X \geq 4$ allora $X \in \{4, 5, 6\}$, e quindi si hanno 2 casi favorevoli su 3 che X sia pari, contro i 3 casi favorevoli su 6 iniziali.
Analogamente se sappiamo che X è pari, ovvero $X \in \{2, 4, 6\}$, si hanno ancora 2 casi favorevoli su 3 che X sia maggiore o uguale a 4, contro i 3 casi favorevoli su 6 iniziali.

Esercizio

Verificare che A e C sono negativamente correlati.

Correlazione tra eventi

A e B sono

indipendenti se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$;

positivamente correlati se $\mathbb{P}(A \cap B) > \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$;

negativamente correlati se $\mathbb{P}(A \cap B) < \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Esempio

Sia X il risultato del lancio di un dado equilibrato a sei facce, e siano

A l'evento "$X \geq 4$";

B l'evento "X è pari";

C l'evento "X è dispari".

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}\big(\{\ X = 4 \text{ oppure } X = 6\ \}\big) = \frac{1}{3} > \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

Probabilità composta e probabilità totali – 1/2

Un'urna contiene inizialmente 9 palline verdi e 7 palline rosse.
Si estrae una pallina e la si rimette nell'urna insieme a **tre** palline del medesimo colore.
Si estrae successivamente una seconda pallina.

Qual è la probabilità che le due palline estratte siano:

- dello stesso colore;
- di colore diverso;
- almeno una rossa?

Probabilità composta e probabilità totali – 1/2

I estrazione X

$\boxed{9\text{ V} \quad 7\text{ R}}$

$\mathbb{P}(X = V) = \frac{9}{16}$ ↙ ↘ $\mathbb{P}(X = R) = \frac{7}{16}$

II estrazione Y

$\boxed{12\text{ V} \quad 7\text{ R}}$ $\boxed{9\text{ V} \quad 10\text{ R}}$

↙ ↘

$\mathbb{P}(Y = V \text{ sapendo che } X = V) = \frac{12}{19}$ $\mathbb{P}(Y = R \text{ sapendo che } X = V) = \frac{7}{19}$

$$\mathbb{P}(X = V \text{ e } Y = V) = \mathbb{P}(X = V) \cdot \mathbb{P}(Y = V \text{ sapendo che } Y = V)$$
$$= \frac{9}{16} \cdot \frac{12}{19}$$

$$\mathbb{P}(\text{stesso colore}) = ?$$

Il problema dell'ago di Buffon.

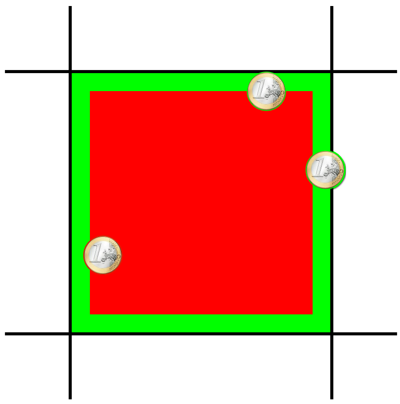
Nel 1777, Georges-Louis Leclerc, conte di Buffon, pose il seguente problema.
Supponiamo di avere un pavimento in parquet fatto da listelli della stessa larghezza, e facciamo cadere un ago sul pavimento.
Qual è la probabilità che l'ago cada su una linea fra due listelli?
La soluzione del problema richiede alcune tecniche di trigonometria e calcolo integrale, ma è possibile mostrare che se l'ago è lungo la metà della larghezza dei listelli, allora la probabilità è $\dfrac{1}{\pi}$.

Problema della moneta di Buffon

Lasciamo cadere una moneta di raggio r su un pavimento formato da piastrelle quadrate di lato ℓ. Qual è la probabilità che la moneta tocchi una linea di giunzione tra due piastrelle?

In ciascuna piastrella la situazione è la seguente:

i "casi favorevoli" sono tutti i punti della zona verde, che distano al più r dai lati della piastrella;
i "casi sfavorevoli" sono tutti i punti del quadrato rosso,
tale quadrato ha lato $\ell - 2\,r$.



La probabilità richiesta è dunque

$$1 - \frac{\text{area “sfavorevole”}}{\text{area “ammissibile”}} = 1 - \frac{(\ell - 2\,r)^2}{\ell^2} = \frac{4\,r\,(\ell - r)}{\ell^2}$$

Infiniti lanci di monete (1/2)

Problema

Lanciamo ripetutamente una moneta equiibrata finché non otteniamo testa.
Qual è la probabilità che tale evento si realizzi dopo un numero pari di lanci?

Sia T il **tempo di attesa del primo successo** (primo lancio in cui otteniamo testa). È evidente che:

$$\mathbb{P}(T = 1) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(T = 2) = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(T = 3) = \frac{1}{8}$$
$$\mathbb{P}(T = 4) = \frac{1}{16} \qquad \dots \qquad \mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{2^n}$$

e quindi:

$$\mathbb{P}(T \text{ è pari}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Una somma di infiniti numeri è detta una *serie numerica*.

Infiniti lanci di monete (2/2)

Per calcolare tale somma infinita osserviamo che:

$$\mathbb{P}(T = 1) = 2\,\mathbb{P}(T = 2)$$
$$\mathbb{P}(T = 3) = 2\,\mathbb{P}(T = 4)$$
$$\mathbb{P}(T = 5) = 2\,\mathbb{P}(T = 6)$$
$$\vdots$$

ovvero: la probabilità che T sia un certo numero dispari è il doppio della probabilità che T sia il numero pari successivo. Quindi

$$\mathbb{P}(T \text{ è dispari}) = 2\,\mathbb{P}(T \text{ è pari})$$

Ora "T è dispari" è l'evento contrario a "T è pari", quindi:

$$\mathbb{P}(T \text{ è dispari}) = 1 - \mathbb{P}(T \text{ è pari})$$

Combinando queste due relazioni otteniamo:

$$\mathbb{P}(T \text{ è pari}) = \frac{1}{3} \qquad \mathbb{P}(T \text{ è dispari}) = \frac{2}{3}$$